

Über Curvenbüschel.

Von Dr. **Emil Weyr** in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 13. Jänner 1870.)

1. Ein Curvenbüschel n-ter Ordnung ist durch $\frac{n(n+3)}{2}-1$ Punkte bestimmt. Alle Curven des Büschels gehen jedoch durch weitere $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Punkte, so daß im Ganzen n^2 Punkte als Scheitel auftreten.

Wir wollen eine Curve des Büschels kurz mit C und die n^2 Scheitel des Büschels mit (s) bezeichnen.

2. Durch jeden Punkt der Ebene des Büschels geht eine einzige Curve desselben. Bringt man mit dem Curvenbüschel eine in seiner Ebene liegende Gerade G in Verbindung, so bestimmt jede Curve des Büschels auf G eine aus n Punkten bestehende Gruppe, nämlich die Schnittpunkte der Curve mit G.

Die so erhaltenen n-punktigen Gruppen auf G bilden eine Involution n-ten Grades, welche $2(n-1)$ Doppelpunkte besitzt. Es gibt somit $2(n-1)$ Curven des Büschels, welche eine feste Gerade in einer n-punktigen Gruppe schneiden, von welcher zwei Punkte zusammenfallen.

Diese Curven werden die Gerade G im Allgemeinen berühren, so daß wir auch sagen können, es gebe unter den Curven des Büschels $2(n-1)$ solche, welche eine feste Gerade berühren.

3. Unter den $2(n-1)$ Curven des Büschels, welche eine Gerade G in zwei unendlich nahen (zusammenfallenden) Punkten schneiden, kann es bei besonderer Lage der Geraden auch solche geben, für welche das vereinigte Schnittpunktepaar von einem an der betreffenden Stelle auftretenden Doppelpunkte der Curve herrührt.

Mit anderen Worten: wenn es eine Curve in dem Büschel (C) gibt, welche einen Doppelpunkt besitzt, so wird auf jeder durch

diesen Doppelpunkt gehenden Geraden durch das Büschel eine Involution bestimmt, für welche der Doppelpunkt der Curve ein Doppelpunkt der Involution ist.

Dies wird im Allgemeinen eine gewisse Anzahl Male vorkommen, d. h. es wird unter den Curven des Büschels eine gewisse Anzahl solcher geben, welche einen Doppelpunkt besitzen.

Wir wollen es unter Anderem im Folgenden versuchen, auf eine besondere Art die Zahl dieser Curven zu bestimmen.

4. Nehmen wir in der Ebene des Curvenbüschels (C) einen willkürlichen Punkt o an.

Auf jeder durch o gehendeu Geraden A bestimmt das Curvenbüschel eine Involution, welche $2(n-1)$ Doppelpunkte besitzt. Wir fragen nun zunächst, was für eine Curve erfüllen diese Doppelpunkte?

Wie eben bemerkt worden, liegen auf jedem durch o gehenden Strahle $2(n-1)$ solcher Punkte. Sollte von ihnen einmal einer in den Punkt o fallen, so müßte der entsprechende Strahl A in o eine Curve des Büschels berühren. Nun läßt sich in der That eine, aber auch nur eine einzige Curve des Büschels durch o legen, deren Tangente in o eben jene Lage des Strahles A ist, für welche einer der $2(n-1)$ Punkte in den Punkt o fällt.

Der Punkt o gehört somit als ein einfacher Punkt zu dem fraglichen Orte, und somit ist dieser Ort eine Curve $(2(n-1)+1)$-ter d. i. $(2n-1)$-ter Ordnung.

Diese Curve ist aber offenbar zugleich der Ort der Berührungspunkte der von o aus an die Curven des Büschels gezogenen Tangenten. Denn jeder solche Berührungspunkt ist ein Doppelpunkt der auf der betreffenden Tangente auftretenden Involution.

Wir erhalten somit den Satz:

„Zieht man von einem Punkte o an die Curven eines Curvenbüschels n-ter Ordnung die Tangenten, so erfüllen deren Berührungspunkte eine Curve $(2n-1)$-ter Ordnung, welche durch den Punkt o hindurchgeht, und daselbst die durch diesen Punkt gehende Curve des Büschels berührt."

(Man vergleiche den speciellen Fall in dem Aufsatze „Zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung" in den Sitzungsberichten von 1868.)

5. Jedem Punkte o der Ebene kann man in dieser Weise eine Curve $(2n-1)$-ter Ordnung zuordnen, welche durch ihn hindurchgeht, und die wir kurz mit B_o bezeichnen wollen. Die durch o gehende Curve des Büschels (C) soll C_o heißen. Dann haben die beiden Curven B_o und C_o in o eine gemeinschaftliche Tangente.

6. Einem zweiten Punkte p der Ebene entspricht in derselben Weise eine Curve B_p, welche B_o in $(2n-1)^2$ Punkten schneiden wird.

Nun läßt sich leicht einsehen, daß die einem Punkte o entsprechende Curve B_o die n^2 Scheitel s des Curvenbüschels (C) enthalten muß, da jede von o nach einem der Scheitel s gezogene Gerade daselbst von einer Curve des Büschels (C) berührt wird.

Die zwei betrachteten Curven B_o und B_p haben daher außer den n^2 Scheiteln s noch $(2n-1)^2-n^2$ weitere Punkte gemein, welche die Eigenschaft haben, daß die von o und p nach ihnen gezogenen Geraden von den durch diese Punkte gehenden Curven des Büschels (C) in einem Paare zusammenfallender Punkte geschnitten werden. Es muß also ein solcher Punkt entweder ein Doppelpunkt der durch ihn gehenden Curve des Büschels (C) sein, oder aber er ist der Berührungspunkt einer Curve des Büschels mit der Geraden $\overline{op}$. Der letzteren Punkte gibt es aber $2(n-1)$ und folglich wird es $(2n-1)^2-n^2-2(n-1)$ solcher Punkte geben, welche für die durch sie gehenden Curven des Büschels (C) Doppelpunkte sind. Da nun $(2n-1)^2-n^2-2(n-1)=3(n-1)^2$ ist, so erhalten wir den bekannten Satz:

„Unter den Curven eines Büschels n-ter Ordnung gibt es $3(n-1)^2$ Curven mit einem Doppelpunkte."

7. Aus dem Betrachteten folgt unmittelbar, daß sämmtliche Curven B, welche den einzelnen Punkten der Ebene entsprechen, die n^2 Scheitel s des Büschels (C) und die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte des Büschels gemeinschaftlich haben. Dies gibt zusammen $4n^2-6n+3$ den Curven B gemeinschaftliche Punkte.

Construirt man zu einem Punkte o die Curve B_o, so schneidet diese eine durch o gehende Gerade G in o und in $2(n-1)$ weiteren Punkten, in denen G von Curven des Büschels (C) berührt wird. Läßt man den Punkt o die Gerade G durchlaufen, so wird ihm ein Curvensystem B_o entsprechen, dessen Curven die oberwähnten $4n^2-6n+3$ und die $2(n-1)$ auf G liegenden Punkte, in denen G von Curven des Büschels (C) berührt wird, gemeinschaftlich

haben. Dies gibt insgesammt $4n^2-6n+3+2(n-1)=(2n-1)^2$ Punkte, und da die Curven B_0 vom Grade $(2n-1)$ sind, so folgt hieraus, daß sie ein Büschel bilden.

„Die den einzelnen Punkten einer Geraden G entsprechenden Curven B bilden ein Curvenbüschel $(2n-1)$-ten Grade, dessen $(2n-1)^2$ Scheitel durch die n^2 Scheitel s, durch die $3(n-1)^2$ Doppelpunkte und die $2(n-1)$ auf G befindlichen Berührungspunkte des Büschels (C) gebildet werden."

8. Wenn B_o die, einem beliebigen Punkte o der Ebene entsprechende Curve ist, so folgt aus der Art ihrer Entstehung, daß, wenn man o mit einem ihrer Punkte p verbindet, die Gerade $\overline{op}$ in p von einer Curve des Büschels (C) berührt wird.

Soll also durch einen willkürlichen Punkt p der Ebene eine von den Curven B gelegt werden, so lege man durch p eine Curve des Büschels (C), an diese in p die Tangente, so muß dann der Punkt o, welchem die durch p gehende Curve B zugeordnet ist, auf dieser Tangente liegen.

Hieraus folgt jedoch unmittelbar nach Art. 7, daß die durch einen Punkt gehenden Curven B ein Curvenbüschel bilden, und daher die sämmtlichen Curven B der Ebene ein Curvennetz.

„Die sämmtlichen den einzelnen Punkten der Ebene entsprechenden Curven B bilden ein Curvennetz."

In der That ist auch eine Curve B bestimmt, sobald man zwei ihrer Punkte kennt. Legt man nämlich in diesen zwei Punkten an die durch sie gehenden Curven des Büschels (C) die Tangenten, so schneiden sich diese in dem Punkte, dem die betreffende Curve B entspricht.

9. Die Curven des Büschels (C) bilden auf jeder Geraden G eine Involution n-ten Grades mit $2(n-1)$ Doppelpunkten, welche die Berührungspunkte von eben so vielen Curven des Büschels mit der Geraden G sind.

Wenn die Gerade G bei einem der n^2 Scheitel s unendlich nahe vorübergeht, so werden zwei von den $2(n-1)$ Doppelpunkten in unendliche Nähe des betreffenden Scheitels fallen.

Hieraus ergibt sich, daß die einem Punkte o entsprechende Curve B_o die von o nach den n^2 Scheiteln s gezogenen Geraden in diesen Scheiteln berührt.

Wenn von den $2(n-1)$ Doppelpunkten der Involution n-ten Grades, welche das Büschel (C) auf einer Geraden G bestimmt, zwei zusammenfallen, ohne daß G durch einen der n^2 Scheitel s hindurchginge, so bilden sie daselbst ein Punktetrippel der Involution, und es wird die Curve des Büschels (C), welche in dem betreffenden Punkte die Gerade G berührt, daselbst zugleich einen Inflexionspunkt besitzen, so zwar, daß G die zugehörige Inflexionstangente sein wird.

Durch jeden Punkt o wird eine bestimmte Zahl solcher Geraden G gehen, welche Inflexionstangenten von Curven des Büschels (C) sind. Diese Zahl läßt sich leicht bestimmen, da solche Gerade offenbar die durch o an die ihm entsprechende Curve B_o gehenden Tangenten sein werden.

Die Curve B_o ist nach Früherem von der $(2n-1)$-ten Ordnung und, da sie im Allgemeinen keine mehrfachen Punkte besitzen wird, von der $2(n-1)(2n-1)$-ten Classe. Durch o werden also, weil er selbst als einfacher Punkt der Curve angehört, $2(n-1)(2n-1)-2$ Tangenten an dieselbe gehen, unter denen auch die n^2 von o nach den Scheiteln des Büschels (C) gehenden Geraden sind. Daher wird es $2(n-1)(2n-1)-n^2-2$ solcher Tangenten von B_o geben, welche die Curve in Punkten berühren, in denen sie von Curven des Büschels (C) inflectorisch berührt werden.

Wenn man die erhaltene Zahl reducirt, so ergibt sich $3n(n-2)$; also dieselbe Zahl, wie die der Inflexionspunkte einer Curve n-ter Ordnung.

Wir erhalten daher den Satz:

„Durch jeden Punkt der Ebene eines Curvenbüschels n-ter Ordnung gehen $3n(n-2)$ Inflexionstangenten desselben."

Oder:

„Die Inflexionstangenten eines Curvenbüschels n-ter Ordnung umhüllen eine Curve $3n(n-2)$-ter Classe."

10. Legt man an die einzelnen Curven des Büschels (C) in einem der n^2 Scheitel, den wir jetzt insbesondere mit s bezeichnen wollen, die Tangenten, so erhält man ein dem Curvenbüschel projectivisches Tangentenbüschel. Jeder Tangente entspricht die sie berührende Curve. Jede Tangente schneidet daher die ihr entspre-

chende Curve in $(n-2)$ Punkten, welche, wie sich leicht zeigen läßt, auf einer Curve T $(n+1)$-ter Ordnung liegen [1]), welche in s einen dreifachen Punkt besitzt.

Fragen wir nämlich nach der Zahl der Schnittpunkte der Curve T mit einer beliebigen Geraden G, so können wir sie in folgender Weise finden:

Die Curven des Büschels (C) bestimmen auf G eine Involution n-ten Grades und das Tangentenbüschel eine Punktreihe, so zwar, daß jedem Punkte der Letzteren eine Punktgruppe der Involution entspricht.

Es wird daher $(n+1)$-mal vorkommen, daß ein Punkt der Punktreihe mit einem Punkte der ihm entsprechenden Gruppe der Involution zusammenfällt, und dies wird offenbar in Punkten der Curve T geschehen.

Hiemit ist erwiesen, daß T von der $(n+1)$-ten Ordnung ist. Da nun auf jeder Tangente des Tangentenbüschels s $(n-2)$ Punkte der Curve T liegen, so muß der Scheitel s ein dreifacher Punkt von T sein.

Da nun ein dreifacher Punkt einer Curve drei Tangenten besitzt, so schließen wir:

„Unter den Curven eines Büschels n-ter Ordnung gibt es drei solche, welche in einem der n^2 Scheitel einen Inflexionspunkt besitzen."

Es ist klar, daß die einem Scheitel s entsprechende Curve T durch die übrigen n^2-1 Scheitel des Büschels (C) hindurchgehen muß. Für ein Curvenbüschel dritter Ordnung kann man also die drei Inflexionstangenten, welche drei Curven desselben in einem der neun Scheitel besitzen, als die Tangenten einer Curve vierter Ordnung betrachten, welche den betrachteten Scheitel zu einem dreifachen Punkte besitzt und durch die übrigen acht Scheitel hindurchgeht.

11. Da die Curve T von der $(n+1)$-ten Ordnung ist, so ist ihre Classenzahl im Allgemeinen $n(n+1)$, und da ein dreifacher Punkt letztere um sechs Einheiten herabsetzt, so bleibt als Classenzahl von T $n(n+1)-6$. Es werden sich daher durch den dreifachen

---

1) Ein Curvenbüschel n^{ter} Ordnung erzeugt mit einem ihm projectivischen Strahlenbüschel auch im Allgemeinen eine Curve $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Punkt noch $n(n+1)-12$ Tangenten an T legen lassen, welche offenbar dann Doppeltangenten je einer Curve des Büschels (C) sein werden.

„Unter den Curven eines Büschels n-ter Ordnung gibt es $n(n+1)-12$ solche, für welche ein Büschelscheitel der Berührungspunkt einer Doppeltangente ist."

Es kann erst bei Curven vierter oder höherer Ordnung diese Zahl einen von Null verschiedenen Zahlenwerth erlangen.
